



# INFORME TAREA 4

Benjamín Briceño  
RUT:20.653.153-3  
Github: @Benbriel

## 1. Introducción

En esta tarea se creó un sistema planetario entre el Sol y Júpiter, y se integraron sus ecuaciones de movimiento según la ley de gravitación de Newton para órbitas circulares entre ambos cuerpos. Ésta es

$$m_i \cdot \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = G \frac{m_1 m_2}{|d|^3} \vec{d} \quad (1)$$

Donde  $d$  es la distancia entre ambos cuerpos y  $\vec{r}_i$  es la posición del Sol ( $i = 1$ ) o Júpiter ( $i = 2$ ). Para esto, se plantearon las posiciones y velocidades iniciales de ambos cuerpos, y en base a la ley de gravitación universal se utilizaron diversos métodos de integración para obtener el movimiento de tanto el Sol como Júpiter a lo largo de aproximadamente 10 órbitas. Se comparó la precisión de los métodos y se analizaron las variaciones de energía del sistema para cada algoritmo.

Luego, se planteó la situación de una especie alienígena que es capaz de ver únicamente el movimiento del Sol por el eje  $x$  de un eje de coordenadas arbitrario. Esta especie utiliza la técnica de velocidades radiales para intentar detectar planetas orbitando al Sol, por lo que ven cómo la velocidad de esta estrella cambia en el tiempo. Puesto que sus instrumentos solo perciben velocidades mayores a 2 km/s, se buscó cuál es la masa mínima que debe tener Júpiter para poder ser detectado por los alienígenas.

## 2. Desarrollo

Primero, se convirtió el problema a unidades astronómicas, donde se transformaron kilómetros a UA, segundos a años terrestres y kilogramos a masas solares. Luego, se utilizó la Programación Orientada al Objeto en `python` para representar el objeto `SistemaPlanetario`, que contiene al Sol y a Júpiter orbitándose a sí mismos. Este sistema tiene una razón de masas de  $M_{\text{JUP}}/M_{\text{SUN}} = 1/1050$ , donde  $M_{\text{SUN}} = 1$  en estas unidades. Se iniciaron sus posiciones tales que su centro de masas estuviera en el origen y que su distancia inicial fuera aprox. 5.203 [UA], y sus velocidades tales que ambos realizaran un movimiento tangencial al centro de masas en órbita circular. Además, se implementaron métodos de clase para avanzar el sistema en un intervalo de tiempo  $dt$  utilizando los métodos de [Runge-Kutta](#) de orden 4, [Velocity Verlet](#) y [Beeman](#) con corrector. Después de iterar los algoritmos con un  $dt = 0.01$  por aproximadamente 10 órbitas, se obtuvo

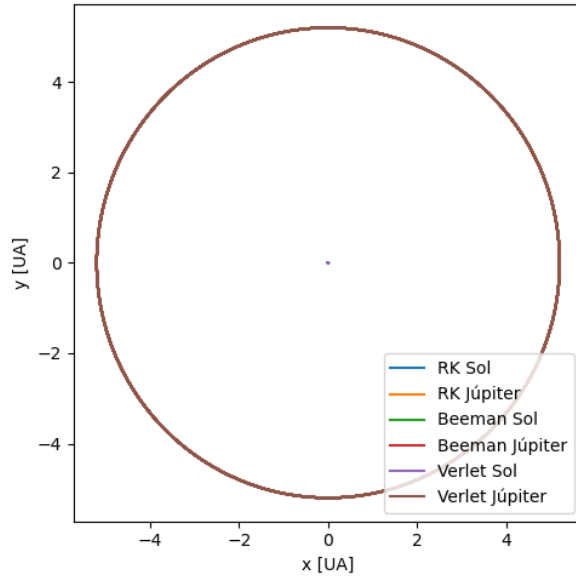


Figura 1: Órbitas del Sol y Júpiter en unidades astronómicas. La trayectoria de ambos cuerpos es aparentemente circular y estable tanto para Runge-Kutta como para Verlet y Beeman.

La Figura 1 indica trayectorias circulares entre el Sol y Júpiter, sin embargo, la diferencia entre los métodos es pequeña, por lo que se debe realizar un acercamiento.

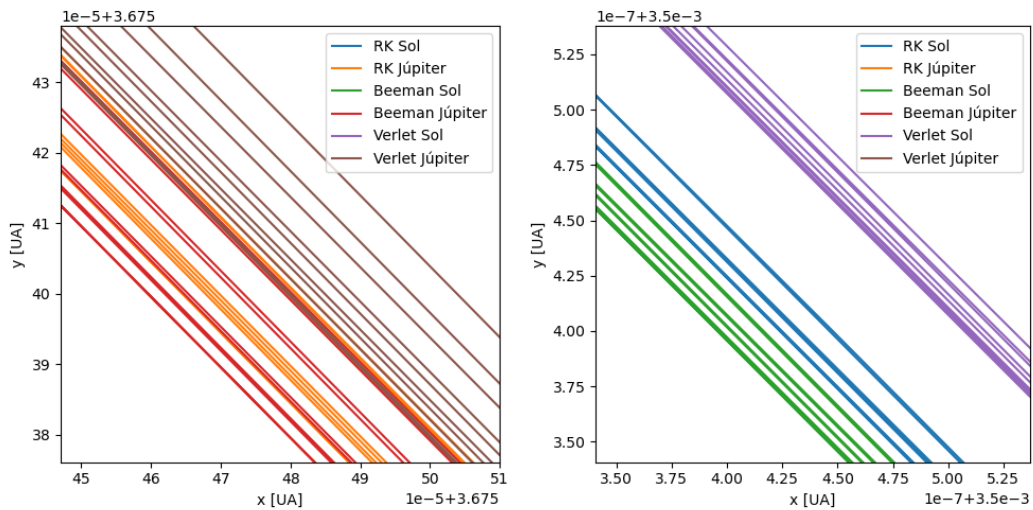


Figura 2: Secciones orbitales para Júpiter (izquierda) y el Sol (derecha). En general, los métodos mantienen un radio de órbita constante, con errores del orden de  $10^{-5}$  y  $10^{-7}$ , respectivamente.

La Figura 2 muestra las 10 órbitas de Júpiter y el Sol, acercadas. Existen pequeñas diferencias entre los distintos métodos, donde destaca que Verlet tiene un radio de órbita aproximadamente  $10^{-7}$  [UA] mayor que los otros dos para el Sol. Sin embargo, estas diferencias no son notorias a gran escala.

Por otra parte, se estudió la variación de la energía total estimada del sistema según las velocidades y posiciones de los cuerpos. Si bien teóricamente la energía total debería conservarse en el tiempo, los errores numéricos de los métodos producirán variaciones. Para esto se estudió como energía total la suma entre las energías cinéticas (K) del Sol y Júpiter y la energía potencial gravitatoria del sistema (U). Se obtuvo

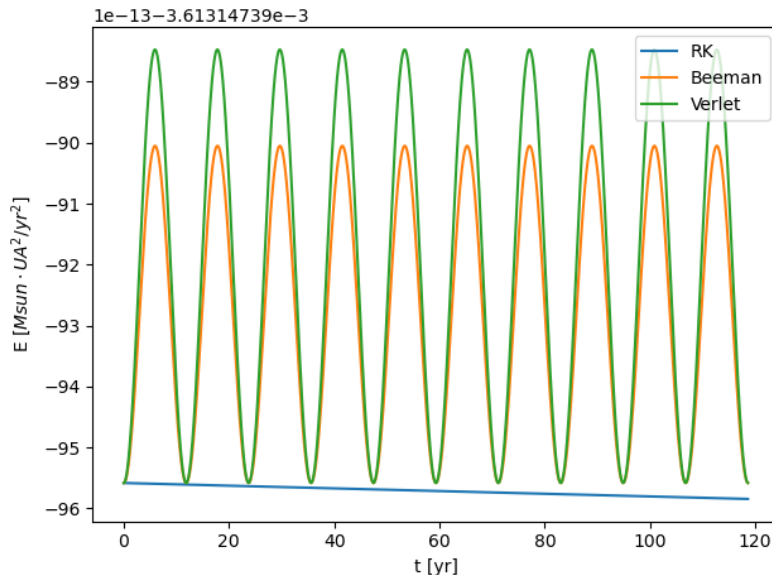


Figura 3: Energía total del sistema en función del tiempo para los métodos de RK, Beeman y Verlet.

Si bien para los métodos de Beeman y Verlet la Figura 3 muestra oscilaciones, cabe destacar que éstas son de amplitudes del orden de  $10^{-13}$ , lo cual es relativamente muy pequeño. Además, el valor medio de la oscilación de Beeman y Verlet se mantiene aparentemente constante en el tiempo, lo que no ocurre para Runge-Kutta. Este método no oscila, sino que con el tiempo disminuye de forma cuasi-lineal, con rugosidades. Esto es de esperar, pues los métodos de Beeman y Verlet calculan las velocidades en base a algoritmos de  $O(\Delta t^3)$  y  $O(\Delta t^2)$ , respectivamente, lo que conlleva un mayor error dentro de una órbita, pero que no varía cuando  $t \rightarrow \infty$ . En cambio, Runge-Kutta no conserva ninguna cantidad, por lo que por muy pequeño que se escoja  $\Delta t$ , eventualmente se producirán errores notorios en la energía.

Método	Energía promedio [ $Msun \cdot ua^2/yr^2$ ]	Rango de energía (máx – mín)
RK4	-3.61314739957e-03	2.621e-14
Beeman	-3.61314739928e-03	5.531e-13
Verlet	-3.61314739920e-03	7.111e-13

Cuadro 1: Promedios y rangos de energía del sistema Sol-Júpiter para 10 órbitas y  $dt = 0.01$ .

Los resultados de la Tabla 1 muestran que la energía total del sistema varía muy poco para los tres métodos de integración, siendo éstas equivalentes hasta el noveno decimal. Si bien el rango de

RK4 es menor que el resto, esto es debido a la cantidad de órbitas del sistema. La Figura 3 muestra una tendencia de RK4 a la baja, por lo que si se aumenta el número de órbitas, eventualmente se puede conseguir que el rango de energías de RK4 sea mayor que Beeman y Verlet.

Por otro lado, se estudió el caso de una especie extraterrestre que quiere detectar la existencia de planetas en el sistema solar. Esto se traduce a buscar una velocidad máxima para el Sol en km/s mayor a 2, que son los límites de sus instrumentos de medición. Para esto se varió la masa de Júpiter, y se utilizó la función `scipy.optimize.bisect`, que por medio del algoritmo de búsqueda de raíces de bisección encuentra la masa mínima de Júpiter tal que la velocidad máxima del Sol en el eje x sea al menos 2 [km/s]. Esto fue realizado inicializando un sistema planetario de distancia inicial  $d=5.203$  y razón de masas  $m$ , y resolviéndolo para al menos 2 órbitas, donde luego se obtuvo la velocidad máxima del Sol en x. La función `bisect` utiliza por defecto una tolerancia absoluta de  $2e-12$  y una tolerancia relativa de  $8.88e-16$ , con una cantidad máxima de 100 iteraciones. Tras esto, se obtuvo

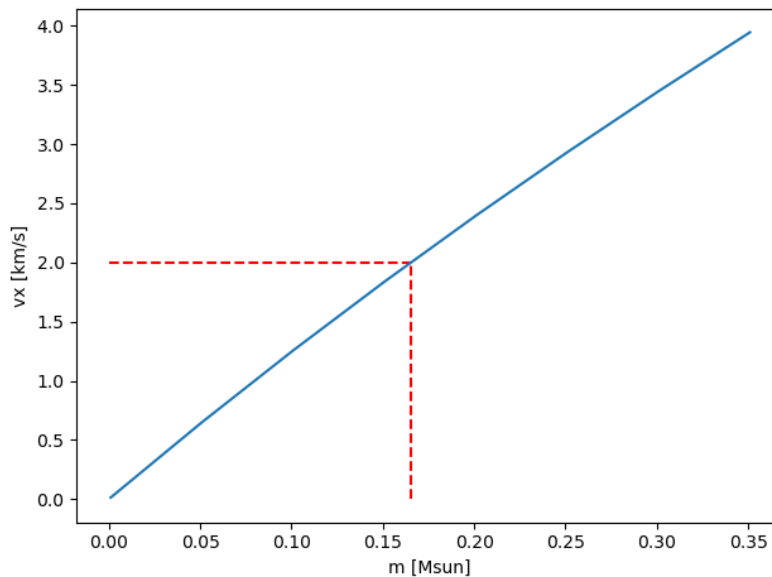


Figura 4: Velocidad máxima [km/s] del Sol en el eje x, en función de la masa [Msun] de Júpiter. En rojo, el valor de  $m$  tal que la velocidad máxima del Sol es 2 [km/s]. La función `bisect` obtuvo un valor de  $m = 0.165221$  [Msun].

Por último, se observó que para el sistema Sol-Júpiter, donde la razón de masas es aproximadamente  $1/1050$ , la velocidad máxima del Sol en x es  $0.01244$  [km/s]. Naturalmente la masa de Júpiter debiera ser mayor que la real, pues su efecto en la velocidad del Sol es aún muy pequeño. Se concluyó que si se aumentara su masa a  $\sim 0.165$  masas solares, podría ser detectado con instrumentos como los que tenemos los humanos, utilizando velocidades radiales.

### 3. Discusión y Conclusiones

Finalmente, es posible determinar que los métodos de Runge-Kutta, Beeman y Verlet simulan correctamente y con alta precisión la órbita circular de un sistema planetario binario para una baja cantidad de órbitas. Sin embargo, al aumentar el número de órbitas, los métodos de Beeman y Verlet son capaces de conservar la energía total del sistema con mayor precisión que Runge-Kutta, el cual produce que el sistema se desestabilice. En este caso, Júpiter cae lentamente con el tiempo hacia el Sol, disminuyendo la energía total más rápidamente que los otros métodos. Esto ocurre a un orden de magnitud muy pequeño, por lo que se requiere de un tiempo total muy grande para notar diferencias a gran escala.

Además, si se quisiera medir la velocidad en el eje  $x$  del Sol, serían necesarios instrumentos más precisos que los que tenemos actualmente. Para poder medir los efectos gravitacionales de Júpiter sobre el Sol, y eventualmente poder detectar al planeta con instrumentos como los nuestros, Júpiter debería tener una masa al menos 0.165 veces la del Sol.

Por último, se concluye que para sistemas gravitacionales binarios de la forma planeta-estrella, donde la razón de masas es muy pequeña, es difícil poder detectar cambios en la velocidad de la estrella producto de la aceleración de gravedad del planeta que la orbita. Por esto son necesarios instrumentos de medición muy precisos, que en los mejores casos detectan planetas masivos. Esto podría ser un problema para una civilización alienígena que intente encontrar exoplanetas en nuestro Sistema Solar.