



INFORME TAREA 5

Benjamín Briceño
RUT: 20.653.153-3
Github: @Benbriel

1. Problema 1: La ecuación de Fisher-KPP

1.1. Introducción

Esta sección de la tarea tiene como objetivo resolver de forma numérica una ecuación de **Reacción-Difusión** para la forma de **Fisher-KPP** en una dimensión, utilizando como discretización una implementación propia de los métodos de Crank-Nickolson y Euler explícito. Este problema será resuelto con condiciones de borde de Dirichlet y ciertas condiciones iniciales. Para esto, se define una ecuación de Reacción-Difusión de la forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + R(u) \quad (1)$$

Donde $R(u)$ es una función de $u(t, x)$ para el caso unidimensional. Se estudiará el caso específico $R(u) = \mu \cdot u(1 - u)$, correspondiente a la ecuación de Fisher-KPP (también conocida como de Fisher). Se hará una discretización del espacio $x \in (0, 1)$ con aproximadamente $N = 500$ puntos, y una cantidad similar ($K = 500$) para el espacio $t \in (0, 4)$. También se utilizarán como valores $\gamma = 0.001$ y $\mu = 1.5$. Además, se plantearán las soluciones numéricas para la condición inicial $u(0, x) = e^{-x^2/0.1}$.

1.2. Desarrollo

Primero, es necesario discretizar la EDP para poder resolverla numéricamente, por lo que se utiliza el método explícito en los términos $\partial u/\partial t$ y $\mu \cdot u(1 - u)$. Este método reemplaza $u(t_n, x_k)$ por T_k^n y $\partial u/\partial t$ por $(T_k^{n+1} - T_k^n)/\epsilon$, donde ϵ es el tamaño de la discretización, en este caso, $= 0.008$. Además, se discretiza el laplaciano de x con el método de Crank-Nickolson, que utiliza un promedio entre la discretización explícita y la implícita. Luego, la ecuación 1 resulta

$$\frac{T_k^{n+1} - T_k^n}{\epsilon} = \frac{\gamma}{2} \left(\frac{T_{k+1}^{n+1} - 2T_k^{n+1} + T_{k-1}^{n+1}}{h^2} + \frac{T_{k+1}^n - 2T_k^n + T_{k-1}^n}{h^2} \right) + \mu (T_k^n - (T_k^n)^2) \quad (2)$$

Además, Se define $r = \epsilon\gamma/(2h^2)$ y $s = \epsilon\mu$. Reordenando los términos tal que los evaluados en t_{n+1} queden a un lado y los evaluados en t_n al otro, es posible crear una ecuación para cada término T_k^{n+1} , conociendo los términos T_k^n , evaluados en t_n . Escribiendo el problema de forma matricial, y considerando que los bordes de la grilla son $(T_0^n = 1, T_K^n = 0, T_k^0 = e^{-x_k^2/0.1})$, se obtiene

$$\begin{pmatrix} 1+2r & -r & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -r & 1+2r & -r & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -r & 1+2r & -r & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -r & 1+2r & -r \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -r & 1+2r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1^{n+1} \\ T_2^{n+1} \\ T_3^{n+1} \\ \vdots \\ T_{K-2}^{n+1} \\ T_{K-1}^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1^n + rT_0^{n+1} \\ B_2^n \\ B_3^n \\ \vdots \\ B_{K-2}^n \\ B_{K-1}^n + rT_K^{n+1} \end{pmatrix} \quad (3)$$

Donde $B_k^n = rT_{k+1}^n + rT_{k-1}^n + (1-2r)T_k^n + sT_k^n(1-T_k^n)$ son términos evaluados en t_n , ya conocidos. Para una mayor eficiencia, se utilizaron las matrices `csc_matrix` del módulo `scipy.sparse`. Estas matrices permiten un cálculo más eficaz cuando existe una gran cantidad de ceros en las columnas de la matriz. Resolviendo el problema matricial de la ecuación 3, se obtiene

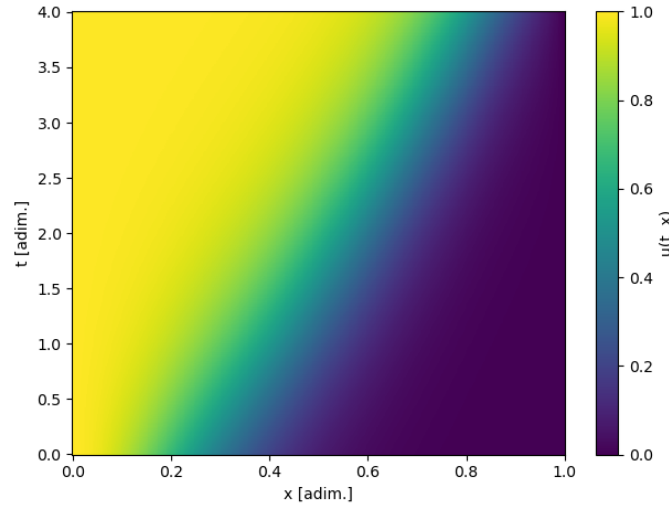


Figura 1: Espectro de la solución numérica a la ecuación 1 de forma Fisher-KPP con condiciones de borde e iniciales $u(t, 0) = 1$, $u(t, 1) = 0$, $u(0, x) = e^{-x^2/0.1}$.

La Figura 1 muestra la evolución temporal de los valores de x . La solución se muestra como un pulso que viaja hacia el x positivo, levantando los valores a su izquierda y estabilizándolos en $x = 1$. Esto se podría interpretar como una población creciendo hacia la derecha, y estabilizándose en una densidad poblacional de 1 por unidad de largo. Una mayor densidad implicaría menos recursos para cada individuo, lo que genera la difusión de los individuos, esparciéndose por la recta. Una menor densidad indica que la población puede crecer. Las condiciones de borde limitan la solución, pues por la izquierda siempre habrá individuos, y por la derecha siempre morirán o desaparecerán.

Por otro lado, la Figura 2 muestra con más claridad la forma de la solución para cada tiempo. La solución deja eventualmente de ser una gaussiana, pues las condiciones de borde rígidas provocan un aumento de $u(t, x)$ en x pequeños, mientras que en los puntos cercanos a $x = 1$ se acerca más rápidamente al cero. Como μ es hartas veces más grande que γ , es más notorio el término de reacción $\mu u(1 - u)$ que la difusión. Esto podría provocar que u se difunda menos en el espacio y alcance a viajar por el eje x antes de estabilizarse.

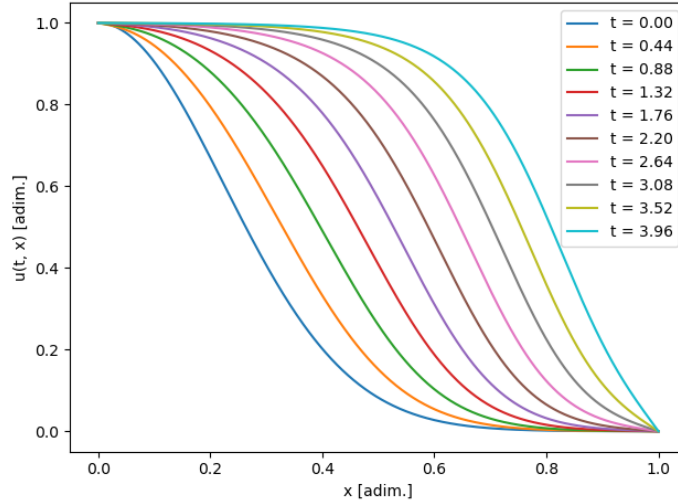


Figura 2: Gráfica de líneas de la solución para 10 tiempos equidistantes.

1.3. Discusión y Conclusiones

En conclusión, fue posible discretizar las ecuaciones de Reacción-Difusión para la forma de Fisher-KPP utilizando métodos en parte implícitos y en parte explícitos. Las soluciones pueden ser encontradas resolviendo un sistema matricial de dimensiones dependientes del tamaño de la discretización y los límites de la solución. Este problema obtiene el estado del sistema para un tiempo siguiente, por lo que se itera múltiples veces a lo largo de los t_n .

No es necesaria una discretización temporal muy pequeña, pues el método de Crank Nickol-son es incondicionalmente estable. Además, aumentar el número de intervalos temporales casi no modificaba el valor de la solución, por lo que se puede establecer que esta es suficientemente precisa.

Se obtuvo una solución equivalente a una especie de pulso viajero, que cambiaba de forma hasta estabilizarse. Este pulso era limitado por las condiciones de borde, y alcanzaba la estabilidad en $u = 1$. Si se dejaba por un tiempo más largo, eventualmente quedaba una solución estacionaria, que se mantenía en 1 a lo largo de x hasta puntos cercanos a $x = 1$, donde decrecía rápidamente hacia 0. Esto puede interpretarse como una solución para $\partial u / \partial t = 0$.

2. Parte 2: La ecuación de Newell-Whitehead-Segel

2.1. Introducción

En esta sección se estudió la ecuación correspondiente al término $R(u) = \mu u(1 - u^2)$, denominada ecuación de [Newell-Whitehead-Segel](#). Se utilizó una discretización similar a la parte anterior, utilizando un espacio $x \in (0, 1)$ y $t \in (0, 4)$, con aproximadamente 500 puntos equidistantes cada uno. Se establecieron los mismos valores de $\gamma = 0.001$ y $\mu = 1.5$, pero se utilizaron condiciones de borde e iniciales distintas. Estas son $u(t, 0) = u(t, 1) = 0$ y $u(0, x)$ una distribución aleatoria uniforme de mínimo -0.3 y máximo 0.3.

Además, se estudiaron los puntos críticos de la ecuación, y se evaluó su estabilidad con respecto al tiempo. Se plantearon algunas soluciones para distintas condiciones iniciales aleatorias, y se concluyó a partir de ello.

2.2. Desarrollo

Esta ecuación presenta como puntos de equilibrio $u = 0, -1, 1$. El punto $u = 0$ es inestable, mientras que $u = \pm 1$ es estable. Esto ocurre pues la parte de reacción $\mu u(1 - u^2)$ posee ceros en $u = 0, -1, 1$, sin embargo, $\partial R/\partial t = \mu(1 - 3u^2)\partial u/\partial t$, que para $u = \pm 1$ es de signo opuesto a $\partial u/\partial t$, y para $u = 0$ del mismo. Luego, los u cercanos a 0 se alejan de él, mientras que los u cercanos a ± 1 se acercan más.

La discretización del espacio y el tiempo es similar a la parte anterior, pues únicamente cambian los términos de la reacción, lo que involucra a los B_k^n , el lado derecho de la ecuación matricial. Si se discretiza la reacción de forma explícita tal que $u(t_n, x_k) = T_k^n$, se obtiene (3), pero $B_k^n = rT_{k+1}^n + rT_{k-1}^n + (1 - 2r)T_k^n + sT_k^n(1 - (T_k^n)^2)$. Además, este problema tiene unas condiciones de borde rígidas, con $T_0^n = 0, T_K^n = 0$. Sin embargo, para este caso se plantearon unas condiciones iniciales aleatorias, utilizando el módulo `random` de `numpy`. La función `uniform` entrega números de una distribución de probabilidad uniforme, acordes a una semilla previamente asignada. Estos números son pseudo-aleatorios, pues son creados por computador, pero emulan de buena manera una distribución aleatoria. Con esto, se escoge $T_k^0 = \text{numpy.random.uniform(low=-0.3, high=0.3, size=K)}$.

Se puede ver en la Figura 3 cómo la solución tiende a 1 o -1 mientras avanza el tiempo, dependiendo de qué tan positivos o negativos son los valores de T_k^0 en un intervalo espacial. Al contrario de el Problema 1, no se produce un pulso viajero, sino que se suavizan las irregularidades iniciales, las cuales tienen únicamente a 1 o -1. Esta polarización ocurre a lo largo del tiempo, y no ocurre ninguna difusión. Esto puede también deberse a la diferencia entre γ y μ .

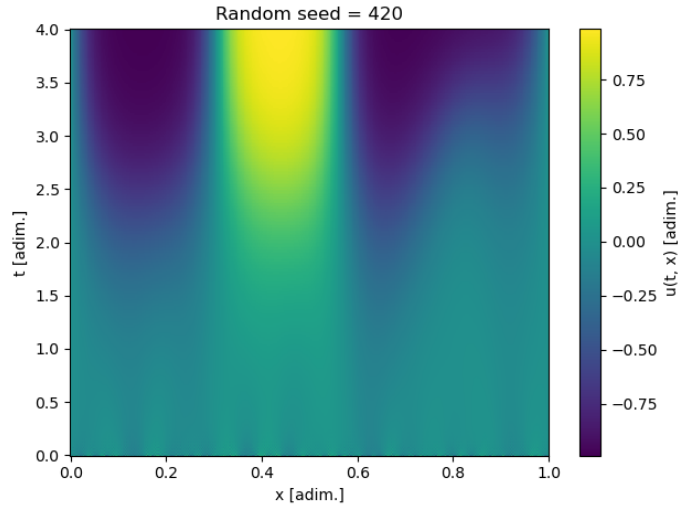


Figura 3: Espectro de la solución al problema aleatorio con `numpy.random.seed(420)`. Las irregularidades iniciales son aumentadas y suavizadas conforme avanza el tiempo.

Por otro lado, se modificaron las condiciones iniciales del problema, estableciendo diferentes semillas aleatorias. Esto resultó en

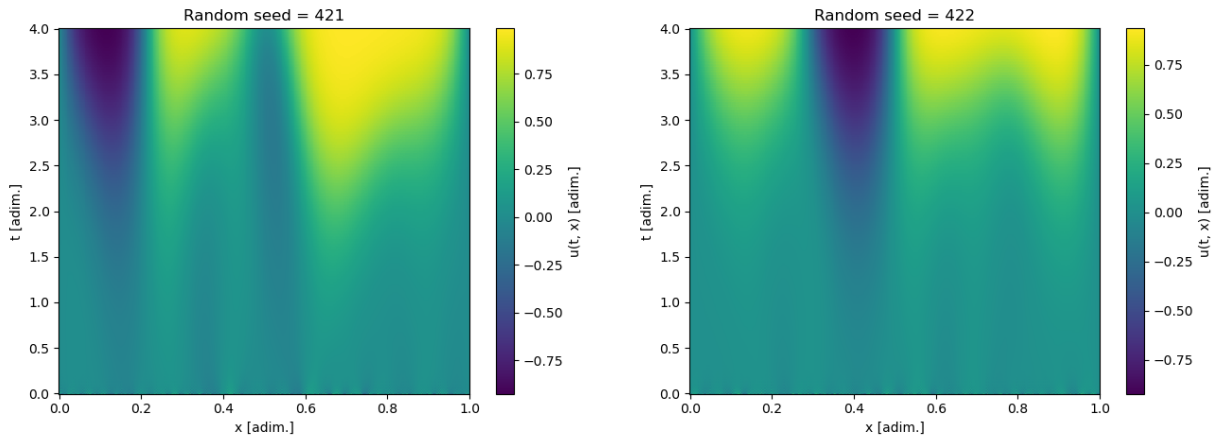


Figura 4: Solución a la ecuación de Newell-WS con condiciones iniciales aleatorias para distintas semillas y condiciones de borde nulas.

Se desprende de la Figura 4 que la solución cuando $t \rightarrow \infty$ depende fuertemente de las condiciones iniciales. Pequeñas irregularidades positivas provocarían una tendencia a $u = 1$, mientras que las negativas hacia $u = -1$. Una vez se polariza x , se llega a la estabilidad.

2.3. Discusión y Conclusiones

La solución a la ecuación de Newell-WS con condiciones iniciales aleatorias producía una polarización del eje x , basado en pequeñas irregularidades iniciales. Es decir, el valor de $u(t \rightarrow \infty, x)$

depende fuertemente de las condiciones iniciales, y las leves tendencias que existían hacia el eje positivo o negativo en un intervalo. Además, la ausencia de una difusión puede ser explicada por el bajo valor de γ con respecto a μ . Al contrario de Fisher-KPP, esta ecuación permite una estabilidad en $u = -1$, lo que causa la polarización a lo largo del tiempo.

La solución tiende a estabilizarse en el tiempo, por lo que $\partial u / \partial t \rightarrow \infty$. Los valores de $u(t \rightarrow \infty, x)$ tienden a 1 o -1, y se alejan del 0, tal como lo previsto en el análisis de estabilidad. La solución no cambiaba en mayor cantidad al disminuir la cantidad de intervalos temporales, por lo que se desprende que esta solución es precisa.

Las ecuaciones de Reacción-Difusión, al ser una extensión de la ecuación de calor, poseen aún más propiedades, y son capaces de describir una gran cantidad de fenómenos naturales. El estudio tanto numérico como analítico de éstas es fundamental para comprender y predecir de mejor manera los fenómenos físicos que nos rodean. Los métodos numéricos para resolver estas ecuaciones son muy útiles a la hora de aproximar soluciones para ellas. Estos son muy poderosos, pues permiten entender el comportamiento de EDPs cuya solución real es o desconocida, o muy difícil de trabajar con papel y lápiz.